trobar amb un nombre finit de passos. Amb els anys, les crítiques de Kronecker cap a Weierstrass van augmentar de to i estaven farcides de mordaç ironia, cosa que va doldre profundament Weierstrass i va fer que s'acabés la bona relació que hi havia hagut entre ells.

Quan Weierstrass va complir setanta anys es van reunir a Berlín alumnes i seguidors d'arreu per retre-li un homenatge amb motiu de la seva jubilació. Quan en va complir vuitanta, se li va fer un altre homenatge. Weierstrass es mantingué solter tota la vida i a Berlín vivia amb les seves dues germanes. La vida de Weierstrass van ser les matemàtiques. No es va implicar en política i solia evitar la vida pública social però, quan per algun motiu havia de manifestar les seves idees, sempre mostrava un esperit liberal i demòcrata. Li agradava el pensament Kantià i era contrari al de Fichte i Schelling. El molestaven els fanatismes polítics i religiosos, ell era catòlic però sempre va ser molt respectuós amb les altres formes de culte, fins i tot en un discurs que va fer quan va ser anomenat rector de la Universitat de Berlín, va valorar positivament la significació cultural que havia tingut la Reforma en el seu temps. No se sentia motivat per la música i, llevat de la poesia, no se li coneixien altres aficions culturals. Els tres últims anys de la seva vida van ser particularment dolorosos, ja no es podia moure i estava sempre assegut en una butaca. El 1891 havia mort L. Kronecker i el 1893 E. Kummer. Weierstrass va morir d'una pneumònia el 19 de febrer de 1897, a l'edat de vuitanta-dos anys.

La publicació de l'obra de Weierstrass es va iniciar els tres últims anys de la seva vida. Els dos primers volums van aparèixer el 1894 i 1895, i l'últim volum publicat, el setè, l'any 1927. Avui dia encara hi ha part de l'obra matemàtica de Weierstrass sense publicar.

Relació dels llibres consultats per la redacció d'aquest racó biogràfic sobre Karl Weierstrass.


1. Wussing, H.; Arnold, W. *Biografías de grandes matemáticos*. Universitat de Saragossa, 1989.
2. Biermann, Kurt-R. *Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm*. Complete Dictionary of Scientific Biography, `http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904588.html`.
3. Begehr, H. G. W. *et al.* (ed.) *Mathematics in Berlin*. Birkhäuser Verlag, 1998.
4. James, I. *Remarkable Mathematicians*. Cambridge University Press, 2002.
5. Bottazzini, U. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer Verlag, 1986.



Eduard Recasens Gallart
UPC


# Webs de matemàtiques

## Guerra de gràfiques

Us convido a una partida de guerra de gràfiques. És un joc tremendament addictiu i força adequat per a matemàtics, que us farà passar estones divertides amb les funcions i les seves gràfiques. El joc s'anomena Graphwar i el podeu trobar a `graphwar.com`.

El camp de batalla és el rectangle $[-25, 25] \times [-15, 15]$ dins $\mathbb{R}^2$. El teu exèrcit són quatre boletes, cercles de diàmetre 1, col·locades a l'esquerra del rectangle ($x < 0$), i l'enemic són quatre boles similars a la banda positiva oposada. Les teves armes són les funcions reals. Distribuïts pel rectangle hi ha uns obstacles en forma de boles negres aleatòries que bloquegen els trets.

Per torn, dispares des d'un dels teus soldats-bola. I dispares segons la trajectòria d'una funció real $y = f(x)$. El programa dibuixa la funció, afegint-li una constant per tal que passi pel soldat-bola actiu, i aleshores el tret segueix la gràfica de la funció. Si el tret entra en contacte amb un soldat (aliè o propi, compte!), el fulmina. A figura 1 podeu veure un camp de batalla senzillet, amb pocs obstacles, i un tret fet amb la funció $y = x/3$, que malauradament passa entremig de dos soldats enemics.

A partir d'aquí, l'única limitació és la vostra imaginació i l'habilitat que tingueu a triar funcions que obtinguin la gràfica desitjada. Sembla

que a la figura 1 l'únic necessari per a carregar-se els enemics és ajustar el pendent de la recta-tret, però ja veureu que si els obstacles són complicats necessitareu funcions més hàbils i que tinguin recorreguts en corba o angle. I la fita més gran que podreu aconseguir, de la qual us podreu sentir ben orgullosos, és que una gràfica mati dos o més soldats enemics. Per exemple, algunes eines que us poden ser útils al vostre arsenal són:

- Paràboles. Necessàries moltes vegades per a disparar al voltant d'un obstacle.
- Sinus i cosinus. La seva utilitat és màxima i rau en la seva amplitud, de manera que no cal ajustar tant el pendent com si dispares una recta. Si a la figura 1, en lloc d'aquesta simple recta hagués disparat la funció

  $$y = \frac{x}{3} + \sin 10x,$$

  l'amplitud del sinus m'hagués permès matar els dos soldats amb un sol tret.
- Valor absolut. Molt útil per a fer canviar el tret de direcció abruptament. Les seves variants són extremadament útils, com ara per exemple la funció salt

  $$y = 1 + \frac{|x|}{x}$$

  que és zero pels negatius i dos pels positius, i serveix per a incloure alguna cosa (com per exemple un sinus) només a la part positiva de la gràfica.
- La funció $1/x$. La faig servir perquè és útil per a arribar a racons difícils, atès que és pràcticament horitzontal i de sobte esdevé quasi vertical.

  A la figura 2 podeu veure un tret construït combinant una paràbola, un sinus i la funció salt; com veieu, va ser útil per a carregar-se els soldats de l'Agent Smith. Aquí podeu veure la utilitat de la funció salt: si a la paràbola li sumes el sinus directament, sense el salt, aleshores xocarà amb els obstacles inicials.

Només us puc dir que proveu el joc vosaltres mateixos, i veureu com passeu una bona estona. El joc funciona en Java (cal tenir instal·lat el Java Runtime Environment al navegador) i és altament configurable. Podeu triar el nombre de soldats, podeu jugar contra la màquina o en línia uns contra els altres cadascú des de casa seva. Fins i tot podeu triar la variant extrema per a matemàtics: el joc et dóna l'opció de jugar no amb la funció, sinó amb la seva derivada primera o segona. És a dir, tu entres la funció $y'$, i el programa la integra i dispara la funció $y$. I igualment amb la derivada segona, donant-li la condició inicial adient. Això, de totes maneres, és el *nivell expert,* només recomanable quan el nivell normal amb $y$ ja el tens prou dominat.

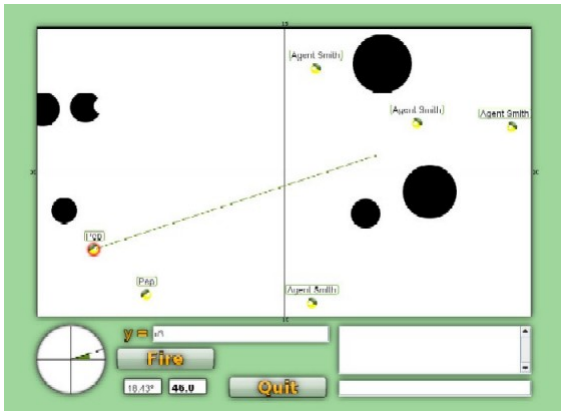


Figura 1: Un tret senzill.

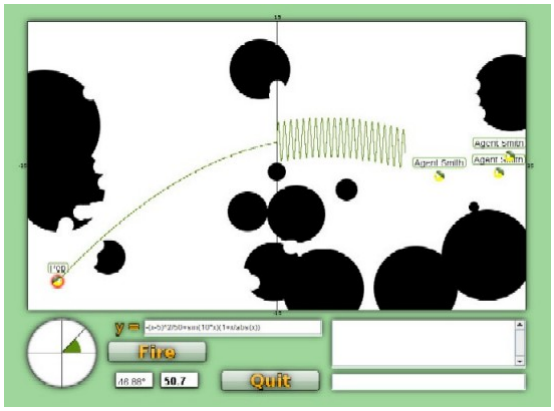


Figura 2: La funció

$$y = -\frac{(x-5)^2}{50} + \left(1 + \frac{|x|}{x}\right) \sin 10x.$$

Jo no vaig resistir la temptació de recomanar el joc a classe, i al cap d'uns dies em vaig trobar un parell d'alumnes discutint: «Però si l'has matat amb una exponencial!». Graphwar és un joc magníficament pensat i implementat, i si a més fa que algun alumne aprengui més càlcul, doncs encara millor. I diu que hi ha facultats que organitzen campionats i tot!

Josep Burillo
UPC